Métodos Numéricos
15 de julio de 2022
Recuperatorio
Primer Parcial

DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

- ☐ Resolver ejercicios en hojas separadas
- ☐ Completar nombre en las hojas
- ☐ Completar LU y nombre en el enunciado
- ☐ **Justificar** **<u>todas</u>** **las respuestas**

Ej.	Ej. 2	Ej. 3

1. (a) Sean $S, T \in \mathbb{R}^n$ dos subespacios distintos de $\mathbb{R}^n$ tales que $dim(S) = dim(T) = n-1$. Calcular $dim(S+T)$. (10 puntos)

   (b) Sea $S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} / \operatorname{tr}(A) = 0\}$ y $T = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} / Im(A) = \langle e_1 \rangle\}$. Calcular $dim(S)$ y $dim(T)$. (8 puntos)

   (c) Si $S = \langle (1,-1,1,-2), (-2,0,0,-6) \rangle$ y $T = \langle (a,1,-1,2), (1,b,0,3) \rangle$, determinar todos los valores de a y b para los cuales $S = T$. (7 puntos)

2. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible con dos factorizaciones conocidas: $A = LU = QR$ sus factorizaciones LU y QR respectivamente. Definimos la matriz B como

$$B = \begin{pmatrix} 2A & Q \\ -6R & I \end{pmatrix}$$

   (a) Hallar la factorización LU de la matriz B (la L con unos en la diagonal). ¿Es B inversible? (15 puntos)

   (b) Proponer un método eficiente para resolver el sistema $Bx = c$ que no involucre utilizar la matriz entera B de $2n \times 2n$, y solo se resuelvan sistemas de a lo sumo $n \times n$. (10 puntos)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no necesariamente simétrica.

   (a) Sea la siguiente afirmación:

   A es definida positiva $\iff$ A es semidefinida positiva[1] y A es inversible.

   Una de las implicaciones es verdadera y la otra no lo es. Probar la implicación verdadera y considerar la matriz $I - ae_2e_1^t \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (para un $a \in \mathbb{R}$ conveniente) como contraejemplo para la otra implicación, justificando por qué lo es. (10 puntos)

   (b) Probar que si A es definida positiva entonces $a_{ii}a_{jj} > a_{ij}a_{ji}$ para cualquier $i \neq j$. (8 puntos)

   (c) Probar que $\begin{pmatrix} 2 & 2-a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ es definida positiva para cualquier $a \in \mathbb{R}$. (7 puntos)

4. Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de Householder.

   (a) Probar que si $n = 2$ entonces $\operatorname{tr}(H) = 0$. (7 puntos)

   (b) Si $n \geq 2$, calcular la traza de H. (8 puntos)

   (c) Determinar si la matriz $\begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ es de Givens o de Householder, justificando en cada caso. (10 puntos)

[1] Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *semidefinida positiva* si $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^t A x \geq 0$.